



# STATISTIKA

## POKAZATELJI STATISTIČKIH SERIJA – NASTAVAK

# POKAZATELJI STATISTIČKIH SERIJA - IZRAČUNATE SREDNJE VREDNOSTI – HARMONIJSKA SREDINA

- Neka obeležja mogu biti iskazana u pravoj ili u recipročnoj veličini.
- *Prave veličine su one koje se, izražavajući vrednost obeležja, kreću u istom smeru kao i vrednost pojave koju izražavaju, a recipročne (obrnute) su one veličine, koje se izražavajući vrednost obeležja kreću u suprotnom pravcu od pravca kretanja vrednosti pojave koju izražavaju.*
- Proizvodnost rada u vidu prave veličine iskazuje se kao obim proizvodnje u jedinici vremena. Međutim, proizvodnost rada može se iskazati i u vidu utroška vremena za proizvodnju jedinice proizvoda.

# POKAZATELJI STATISTIČKIH SERIJA - IZRAČUNATE SREDNJE VREDNOSTI – HARMONIJSKA SREDINA

- Obrt kapitala se definiše kao utrošak kapitala u jedinici vremena, ali može se dati i u recipročnom obliku kao vreme obrta jedinice kapitala.
- Kupovna moć novca može se iskazati preko prave vrednosti obeležja date kao količina robe kupljena za novčanu jedinicu ili preko obrnute veličine obeležja date preko cene za jedinicu robe.
- Za pojavu brzina kretanja prava veličina obeležja je put pređen u vremenskoj jedinici, a recipročna veličina obeležja je utrošak vremena za jedinicu puta.
- Gustina naseljenosti je upravo proporcionalna broju stanovnika na kvadratni kilometar, a obrnuto proporcionalna broju kvadratnih kilometara na 100 stanovnika.

# POKAZATELJI STATISTIČKIH SERIJA - IZRAČUNATE SREDNJE VREDNOSTI – HARMONIJSKA SREDINA

- *Recipročna vrednost aritmetičke sredine recipročnih vrednosti obeležja naziva se harmonijska sredina (H).*
- Za negrupisane podatke prosta harmonijska sredina je:

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

- **Primer 6:** Jedan traktor, pri prevozu zrna pšenice od kombajna do ekonomskog dvorišta, put od 1km prelazi za 4 minuta, drugi traktor isti put prelazi za 5 minuta i treći za 6 minuta. Kojom se prosečnom brzinom kreću ovi traktori?

# POKAZATELJI STATISTIČKIH SERIJA - IZRAČUNATE SREDNJE VREDNOSTI – HARMONIJSKA SREDINA

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} = \frac{3}{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}} = 4,86$$

Posmatrani traktori u proseku utroše 4,86 minuta za put od 1km.

Kada se podaci ponavljaju određuje se ponderisana harmonijska sredina definisana sledećim obrascem:

$$H = \frac{f_1 + f_2 + \dots + f_k}{\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \dots + \frac{f_k}{x_k}} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i}{\sum_{i=1}^k \frac{f_i}{x_i}}$$

# POKAZATELJI STATISTIČKIH SERIJA - IZRAČUNATE SREDNJE VREDNOSTI – HARMONIJSKA SREDINA

- **Primer 7:** Odrediti prosečnu produktivnost rada na bazi sledećih podataka:

Tabela 3.5: Raspored radnika prema vremenu potrebnom za izradu jednog komada proizvoda

Vreme izrade jednog komada (minut)	Broj radnika
30	24
31	30
32	27
33	19

# POKAZATELJI STATISTIČKIH SERIJA - IZRAČUNATE SREDNJE VREDNOSTI – HARMONIJSKA SREDINA

Tabela 3.5a: Radna tabela

Vreme izrade jednog komada (minut) $x_i$	Broj radnika $f_i$	$f_i/x_i$
30	24	0,8000
31	30	0,9677
32	27	0,8438
33	19	0,5758
-	<b>100</b>	<b>3,1873</b>

$$H = \frac{\sum_{i=1}^k f_i}{\sum_{i=1}^k \frac{f_i}{x_i}} = \frac{100}{3,1873} = 31,3745$$

- Prema tome, posmatrana grupa radnika u proseku utroši 31,3745 minuta za proizvodnju jedinice proizvoda.



# POKAZATELJI STATISTIČKIH SERIJA - IZRAČUNATE SREDNJE VREDNOSTI – GEOMETRIJSKA SREDINA

- **Geometrijska sredina** se koristi prilikom istraživanja dinamike neke pojave pri analizi vremenskih serija.
- **Geometrijska sredina ( $G$ ) se dobija kao  $n$ -ti koren iz proizvoda podataka**, što znači da je u slučaju negrupisanih podataka jednaka:

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

dok je u slučaju grupisanih podataka jednaka:

$$G = \sqrt[n]{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdot \dots \cdot x_k^{f_k}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^k x_i^{f_i}}$$



# POKAZATELJI STATISTIČKIH SERIJA - IZRAČUNATE SREDNJE VREDNOSTI – GEOMETRIJSKA SREDINA

- **Primer 8:** Izračunati prosečna novčana sredstva jednog preduzeća za posmatrani period.

Tabela 3.6: Novčana sredstva preduzeća u periodu od 2008. do 2013. godine

Godine	Novčana sredstva (000 000 din)
2008	2,1
2009	2,7
2010	3,8
2011	4,3
2012	5,7
2013	6,4

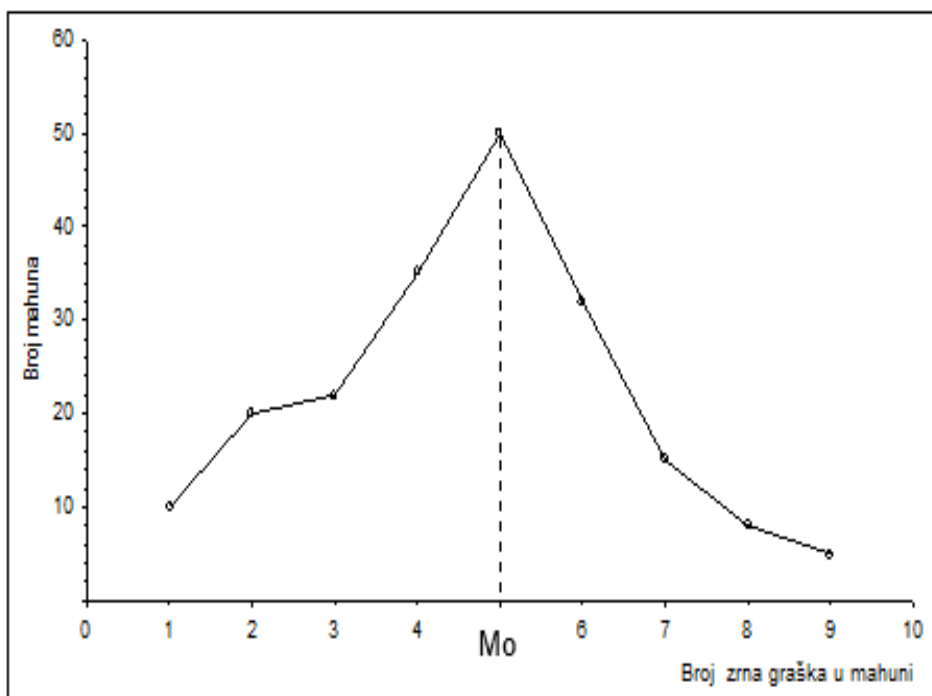
$$G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} = \sqrt[6]{2,1 \cdot 2,7 \cdot 3,8 \cdot 4,3 \cdot 5,7 \cdot 6,4} = 3,8739$$

Prosečna novčana sredstva posmatranog preduzeća, u periodu od 2008. do 2013. godine iznosila su 3 873 900 din.

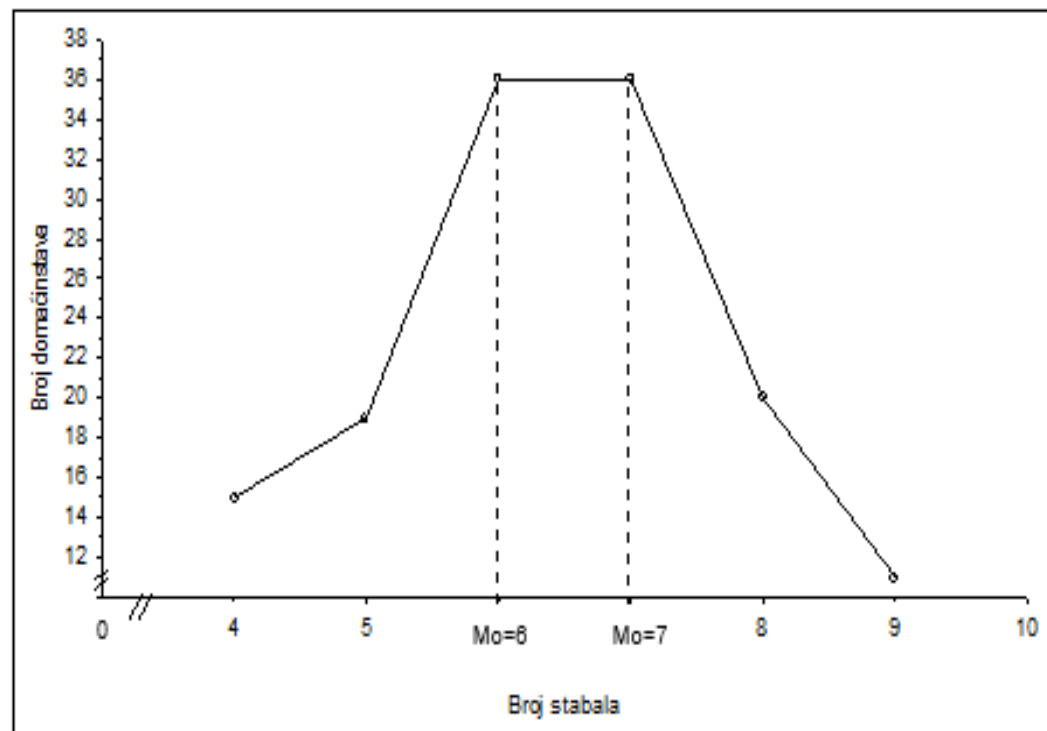
# POKAZATELJI STATISTIČKIH SERIJA - POZICIONE SREDNJE VREDNOSTI - MODUS

- *Modus ( $M_o$ ) je vrednost obeležja koja se najčešće javlja u statističkoj seriji, tj. vrednost obeležja koja ima najveću frekvenciju.*
- Modus je vrednost obeležja oko koje se koncentrišu elementi statističkog skupa.
- Često se za modus kaže da je tipična vrednost obeležja.
- To je vrednost obeležja do koje distribucija raste, a posle koje opada.
- Distribucija frekvencija može imati i dva ili više modusa. Prema njihovom broju distribucije frekvencija se klasifikuju kao unimodalne (distribucija ima jedan modus), bimodalne (distribucija ima dve vrednosti obeležja sa istom i to najvećom frekvencijom) i multimodalne ili polimodalne (distribucija ima tri i više modusa).

# POKAZATELJI STATISTIČKIH SERIJA - POZICIONE SREDNJE VREDNOSTI - MODUS



Slika 3.1: Modus za prekidnu distribuciju frekvencija



Slika 3.2: Bimodalna prekidna distribucija frekvencija

# POKAZATELJI STATISTIČKIH SERIJA - POZICIONE SREDNJE VREDNOSTI - MODUS

- **Primer 9:** Broj stabala višanja po domaćinstvu u jednom uzorku prikazan je sledećom distribucijom:

Tabela 3.7: Raspored domaćinstava prema broju stabala višanja po domaćinstvu

Broj Stabala	Broj domaćinstava
4	15
5	19
6	36
7	36
8	20
9	11

Odrediti modus.

# POKAZATELJI STATISTIČKIH SERIJA - POZICIONE SREDNJE VREDNOSTI - MODUS

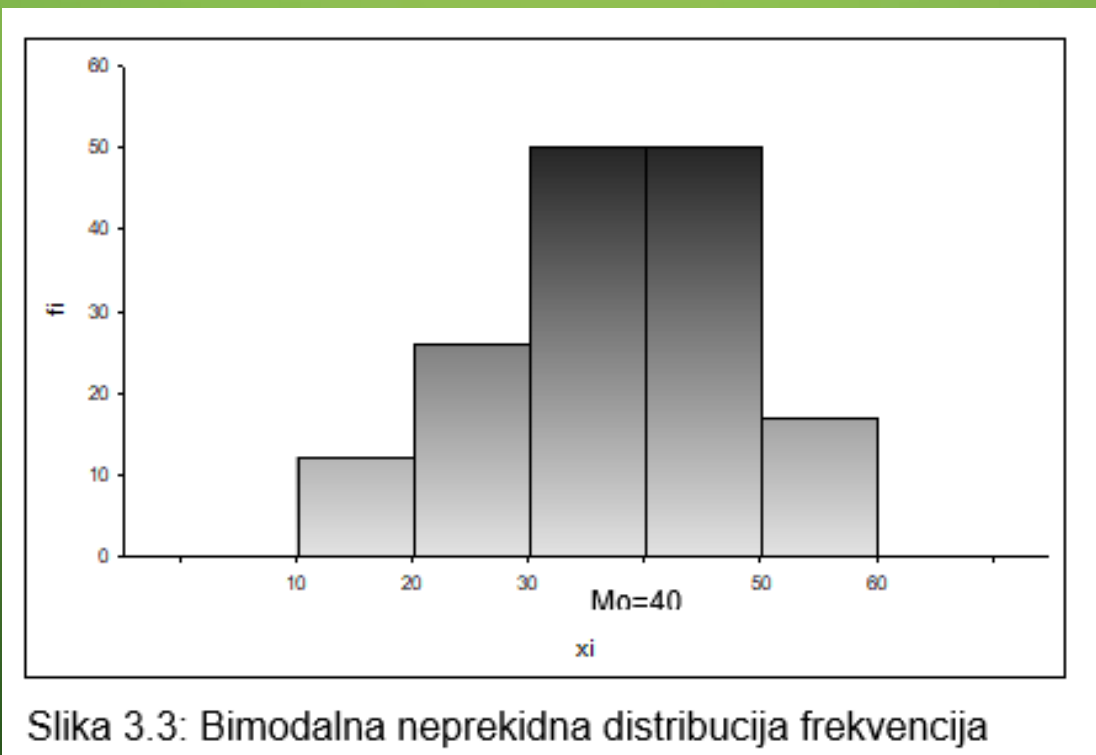
- Kod distribucije frekvencija sa neprekidnim obeležjem modalni interval je interval sa najvećim brojem jedinica, a kao približna vrednost modusa može se uzeti sredina takvog intervala.
- Međutim, za preciznije određivanje modusa koristi se sledeća formula:

$$M_o = g_1 + \frac{f_{m_0} - f_d}{(f_{m_0} - f_d) + (f_{m_0} - f_g)} \cdot d.$$

gde je:  $g_1$  - donja granica modalnog intervala;  $d$  - dužina klasnog intervala;  $f_{m_0}$  - frekvencija modalnog intervala;  $f_d$  - frekvencija intervala pre modalnog i  $f_g$  - frekvencija intervala posle modalnog.

# POKAZATELJI STATISTIČKIH SERIJA - POZICIONE SREDNJE VREDNOSTI - MODUS

- Ako dve susedne grupe distribucije frekvencija imaju iste i to maksimalne frekvencije, **modus je zajednička granica tih intervala.**



# POKAZATELJI STATISTIČKIH SERIJA - POZICIONE SREDNJE VREDNOSTI - MODUS

- **Primer 10:** Odrediti modus za sledeći raspored domaćinstava prema mesečnoj potrošnji mleka:

Tabela 3.8: Raspored domaćinstava prema mesečnoj potrošnji mleka po domaćinstvu

Mesečna potrošnja mleka po domaćinstvu (L)	Broj domaćinstava
12,0 - 19,9	12
20,0 - 27,9	23
28,0 - 35,9	85
36,0 - 43,9	55
44,0 - 51,9	25

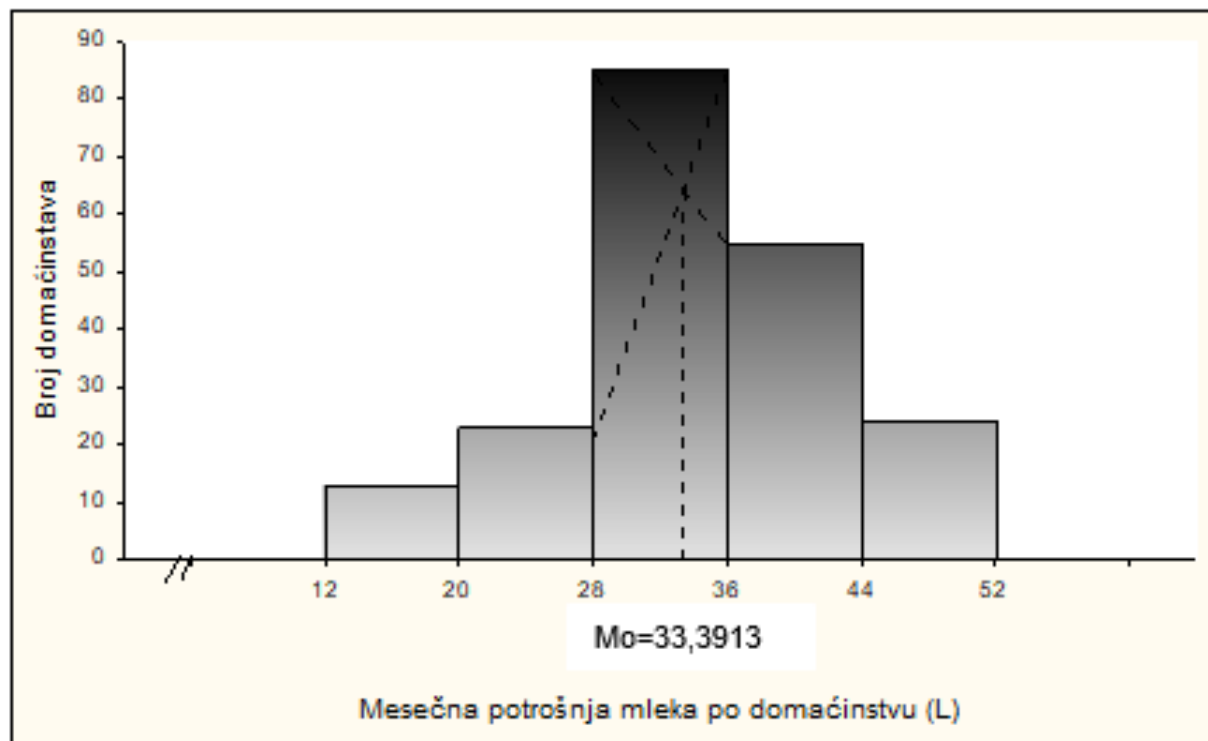
Modalni interval je interval 28-36, njemu pripada najveći broj posmatranih jedinica, tj. domaćinstava.

$$M_o = g_1 + \frac{f_{m_0} - f_d}{(f_{m_0} - f_d) + (f_{m_0} - f_g)} \cdot d =$$
$$= 28 + \frac{85 - 23}{(85 - 23) + (85 - 55)} \cdot 8 = 33,3913.$$



# POKAZATELJI STATISTIČKIH SERIJA - POZICIONE SREDNJE VREDNOSTI - MODUS

- Prema tome domaćinstva najčešće troše mesečno 33,3913 litara mleka.
- Grafički modus se određuje na sledeći način:



Slika 3.4: Određivanje modusa kod neprekidnog obeležja

# POKAZATELJI STATISTIČKIH SERIJA - POZICIONE SREDNJE VREDNOSTI - MEDIJANA

- *Medijana ( $M_e$ ,  $M_d$ ) je vrednost numeričkog obeležja koja se nalazi u sredini sređene statističke serije.*
- Medijana je srednja vrednost numeričkog obeležja koja elemente posmatranog skupa deli u dva jednaka dela.
- Prema tome, u jednom delu serije nalaze se elementi koji imaju vrednost obeležja jednaku ili manju od medijane, a u drugom delu se nalaze elementi koji imaju vrednost obeležja jednaku ili veću od medijane.
- Ako je broj elemenata u posmatranom skupu neparan onda je medijana vrednost obeležja na poziciji  $\frac{n+1}{2}$  ;

$$M_e = x_{\frac{n+1}{2}}$$

# POKAZATELJI STATISTIČKIH SERIJA - POZICIONE SREDNJE VREDNOSTI - MEDIJANA

- **Primer 11:** U pet prodavnica prodate su sledeće količine jednog proizvoda:

$$X_i: 480 \quad 370 \quad 620 \quad 530 \quad 490$$

Odrediti vrednost medijane.

- **Rešenje:** Data statistička serija prvo se mora urediti po veličini članova

$$X_i: 370 \quad 480 \quad 490 \quad 530 \quad 620$$

Kako serija sadrži neparan broj članova (5), za medijanu se uzima vrednost na poziciji  $\frac{n+1}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$ .

- Prema tome, u sređenoj seriji na trećem mestu je vrednost 490, pa medijana iznosi 490.

# POKAZATELJI STATISTIČKIH SERIJA - POZICIONE SREDNJE VREDNOSTI - MEDIJANA

- Kod statističkih serija sa parnim brojem elemenata u sredini su dva člana. Prvi se nalazi na  $\frac{n}{2}$  mestu u seriji, a drugi na poziciji  $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ .
- Medijana se izračunava kao aritmetička sredina ova dva člana, odnosno

$$M_e = \frac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}}{2}$$

# POKAZATELJI STATISTIČKIH SERIJA - POZICIONE SREDNJE VREDNOSTI - MEDIJANA

- **Primer 12:** Odrediti medijanu za sledeću seriju:

Tabela 3.9: Raspored mašina prema iskorišćenosti kapaciteta

<b>Iskorišćenost kapaciteta mašina (%)</b>	<b>Broj mašina</b>
80	4
70	8
75	6
65	5
90	3

# POKAZATELJI STATISTIČKIH SERIJA - POZICIONE SREDNJE VREDNOSTI - MEDIJANA

- Vrednosti obeležja prvo treba urediti po veličini.

Tabela 3.9a: Radna tabela

Iskorišćenost kapaciteta mašina (%) $x_i$	Broj mašina $f_i$	$k_i$
65	5	5
70	8	13
75	6	19
80	4	23
90	3	26
-	<b>26</b>	-

$$M_e = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} = \frac{x_{\frac{26}{2}} + x_{\frac{26}{2}+1}}{2} = \frac{x_{13} + x_{14}}{2} = \frac{70 + 75}{2} = 72,5$$

# POKAZATELJI STATISTIČKIH SERIJA - POZICIONE SREDNJE VREDNOSTI - MEDIJANA

- U slučaju intervalne serije na opisani način se određuje medijalni interval.
- Sredina medijalnog intervala može se uzeti za medijanu.
- Međutim, preciznija vrednost medijane izračunava se prema formuli:

$$M_e = g_1 + \frac{\frac{\sum_{i=1}^k f_i}{2} - K_{i-1}}{f_{m_e}} \cdot d$$

$g_1$  - donja granica medijalnog intervala,

$f_{m_e}$  - frekvencija medijalnog intervala,

$K_{i-1}$  - kumulanta frekvencija pre medijalnog intervala  $i$

$d$  - dužina intervala.



# POKAZATELJI STATISTIČKIH SERIJA - POZICIONE SREDNJE VREDNOSTI - MEDIJANA

- **Primer 13:** Odrediti medijanu za sledeću raspodelu domaćinstava prema mesečnoj potrošnji mleka:

Tabela 3.10: Raspored domaćinstava prema mesečnoj potrošnji mleka

Mesečna potrošnja mleka (l/dom)	Broj domaćinstava
12,0-19,9	12
20,0-27,9	23
28,0-35,9	85
36,0-43,9	55
44,0-51,9	25

Ukupan broj posmatranih jedinica je 200.

To znači da su u sredini 100. i 101. član, koji pripadaju intervalu 28-36, što se vidi iz kumulante date u radnoj tabeli.

# POKAZATELJI STATISTIČKIH SERIJA - POZICIONE SREDNJE VREDNOSTI - MEDIJANA

Tabela 3.10a: Radna tabela

Mesečna potrošnja mleka (l/dom) $x_i$	Broj domaćinstava $f_i$	$k_i$
12,0-19,9	12	12
20,0-27,9	23	35
28,0-35,9	85	120
36,0-43,9	55	175
44,0-51,9	25	200

$$M_e = g_1 + \frac{\frac{\sum_{i=1}^k f_i}{2} - K_{i-1}}{f_{me}} \cdot d = 28 + \frac{\frac{200}{2} - 35}{85} \cdot 8 = 34,1176$$